**Gebrochenrationale Funktionen**

**Definition**

Eine ***gebrochenrationale Funktion f*** ist der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen (Polynomfunktionen) g und h:

z.B.

Dabei bezeichnet n den Zählergrad und m den Nennergrad.

Stellen, an denen eine Funktion f nicht definiert ist, heißen ***Definitionslücken***.

Eine Stelle x0 (≙ Definitionslücke), an der das Schaubild einer Funktion f sich einer senkrechten Geraden annähert, heißt „Unendlichkeitsstelle“ oder ***Polstelle***. Diese Grenzgerade heißt ***senkrechte Asymptote***.

**Eigenschaften gebrochenrationaler Funktionen**

**Aufgabe 1**

**a)** Zeichne die Schaubilder Kf folgender Funktionen.

Lies die Definitionslücken und das Verhalten an den Definitionslücken ab und gib die Gleichung der Asymptoten an.

**b)** Berechne die Nullstellen der Zähler- und Nennerfunktion und vergleiche diese mit den Nullstellen von Kf und den Definitionslücken der Funktion f.

**c)** Formuliere einen Merksatz zu den obigen Erkenntnissen.

**Aufgabe 2**

Ergänze folgende Sätze:

**a)** Die Nullstellen von f sind...

**b)** Die Definitionslücken von f sind...

**c)**  f hat an der Stelle x0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn...

**d)**  f hat an der Stelle x0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn...

**Aufgabe 3**

Betrachte das Schaubild der Funktion .

Faktorisiere Zähler und Nenner und erläutere, warum das Schaubild an der Stelle weder eine senkrechte Asymptote noch eine Nullstelle besitzt.

Erläutere, ob und wenn ja, wo der Unterschied zur Funktion liegt.

Ergänze folgenden Satz: Eine hebbare Definitionslücke x0 von f liegt vor, wenn …

**Lösungsvorschlag:**

**Aufgabe 1:**

-4

-3

-2

-1

1

2

3

4

5

6

7

8

-5

-4

-3

-2

-1

1

2

3

4

5

x

y

O

:

Definitionslücke:

Verhalten an der Definitionslücke: für und gilt: , für und gilt:

senkrechte Asymptote: , waagrechte Asymptote:

Nullstelle der Zählerfunktion: (entspricht Nullstelle von ),

Nullstelle der Nennerfunktion: (entspricht Definitionslücke)

:

-6

-5

-4

-3

-2

-1

1

2

3

4

5

6

-5

-4

-3

-2

-1

1

2

3

4

5

x

y

O

Definitionslücken: ,

Verhalten an den Definitionslücken:

: für und gilt: , für und gilt:

: für und gilt: , für und gilt:

senkrechte Asymptote: , , schiefe Asymptote:

Nullstelle der Zählerfunktion: (entspricht Nullstelle von )

Nullstellen der Nennerfunktion: , (entsprechen Definitionslücken)

-6

-5

-4

-3

-2

-1

1

2

3

4

5

6

-2

-1

1

2

3

4

5

x

y

O

Definitionslücke:

Verhalten an der Definitionslücke: für und gilt: , für und gilt:

senkrechte Asymptote: , waagrechte Asymptote:

Nullstelle der Zählerfunktion: (entspricht Nullstelle von )

Nullstelle der Nennerfunktion: (entspricht Definitionslücke)

-4

-3

-2

-1

1

2

3

4

5

6

7

8

-3

-2

-1

1

2

3

4

5

x

y

O

Definitionslücken: ,

Verhalten an den Definitionslücken:

: für und gilt: , für und gilt:

: für und gilt: , für und gilt:

senkrechte Asymptoten: , , waagrechte Asymptote:

Nullstelle der Zählerfunktion: nicht vorhanden

Nullstellen der Nennerfunktion: , (entspricht Definitionslücken)

**Aufgabe 2:**

a) Die Nullstellen von f sind die Nullstellen der Zählerfunktion.

b) Die Definitionslücken von f sind die Nullstellen der Nennerfunktion.

c) f hat der Stelle x0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn die Polstelle rechnerisch „doppelt“ vorkommt (Vielfachheit 2).

d) f hat der Stelle x0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn die Polstelle rechnerisch „einfach“ vorkommt (Vielfachheit 1).

**Aufgabe 3:**

da sich der Faktor in Zähler und Nenner kürzt, verschwindet sowohl die Nullstelle als auch die senkrechte Asymptote.

Durch das Kürzen entsteht die Funktion , deren Schaubild im Gegensatz zum Schaubild von keine Lücke bei besitzt, sonst aber identisch verläuft.

Eine hebbare Definitionslücke x0 von f liegt vor, wenn sie durch Kürzen des Funktionsterms behoben und dadurch der Definitionsbereich erweitert werden kann.